

Modèles Directionnels et Régularisation des Singularités Gravitationnelles

Division Exponentielle, Cohérence Directionnelle et Tores Dynamiques

l'Architech (Gabriel Breton-Breault)

Octobre 2026

Mots-clés : *singularités gravitationnelles, division exponentielle, cohérence directionnelle, tores dynamiques, régularisation, relativité générale, bouncing cosmology*

Résumé (Abstract)

Ce document propose un cadre théorique alternatif fondé sur trois modèles directionnels originaux — la division exponentielle, la cohérence directionnelle et les tores dynamiques — dans le but de régulariser les singularités gravitationnelles classiques, telles que la singularité centrale des trous noirs et la singularité initiale du Big Bang, sans recourir à la quantification canonique de la gravité. Plutôt que de traiter ces singularités comme des divergences irrémédiables de la courbure ou de l'énergie-impulsion, le cadre proposé les réinterprète comme des redirections directionnelles dans l'espace des phases géométrique. La division exponentielle fournit un opérateur local capable d'absorber les divergences dans une phase exponentielle bornée ; la cohérence directionnelle impose une contrainte tensorielle globale garantissant la

continuité des directions propres des champs même sous courbure extrême ; enfin, les tores dynamiques constituent la réalisation géométrique naturelle de ces contraintes, préservant une extension spatiale minimale non nulle au voisinage des singularités classiques. Ces trois modèles forment ensemble un système cohérent et hiérarchique de régularisation géométrique et dynamique, dont l'équation maîtresse unifiée est présentée à la section 5.

Table des Matières

1. Introduction

2. La Division Exponentielle

2.1 Définition et motivation

2.2 Application à la métrique de Schwarzschild

2.3 Propriétés et invariances

3. La Cohérence Directionnelle

3.1 Principe de cohérence directionnelle

3.2 Cohérence directionnelle et singularités de courbure

3.3 Lien avec la division exponentielle

4. Les Tores Dynamiques

4.1 Structure toroïdale de l'espace-temps

4.2 Dynamique et régularisation

4.3 Connexion avec la cohérence directionnelle

5. Unification : Un Cadre Cohérent de Régularisation

5.1 Le système unifié

5.2 Application au Big Bang

5.3 Application aux trous noirs

6. Comparaison avec les Approches Existantes

7. Discussion et Perspectives

8. Conclusion

9. Références Bibliographiques

1. Introduction

La relativité générale, telle que formulée par Einstein en 1915, constitue à ce jour la description la plus précise et la plus vérifiée de la gravitation à toutes les échelles observationnelles. Cependant, cette théorie porte en elle-même les germes de sa propre incomplétude : sous certaines conditions physiques extrêmes, les équations de champ d'Einstein génèrent des régions de l'espace-temps où la courbure et la densité d'énergie divergent de manière non physique. Ces régions sont connues sous le nom de *singularités gravitationnelles*.

Le cadre mathématique rigoureux de ces divergences est établi par les théorèmes de singularités de Penrose (1965) et Hawking & Penrose (1970), qui démontrent que, sous des conditions génériques de validité des conditions d'énergie et d'existence d'une surface piégée, l'espace-temps doit nécessairement contenir des géodésiques incomplètes. Cette incomplétude est communément interprétée comme la présence d'une singularité physique — un point ou une région où les lois de la physique cessent de s'appliquer. Les deux archétypes de ces singularités sont la *singularité centrale* des trous noirs en $r = 0$ et la *singularité initiale* du Big Bang, correspondant à $t = 0$ dans les modèles de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

Face à cette impasse fondamentale, plusieurs approches ont été proposées pour résoudre ou contourner les singularités. La *gravité quantique à boucles* (LQG), développée par Rovelli, Smolin et Ashtekar, tente de quantifier l'espace-temps lui-même à l'aide de réseaux de spin, supprimant de facto les singularités par la granularité inhérente à la géométrie quantique. La *théorie des cordes*, quant à elle, évite les singularités en attribuant une extension fondamentale non nulle aux constituants élémentaires de la matière. Enfin, la *cosmologie de rebond* (bouncing cosmology), issue notamment des travaux de Bojowald et Brandenberger, propose de remplacer la singularité du Big Bang par un rebond cosmologique non singulier. Chacune de ces approches, si mathématiquement riche, souffre d'une absence de prédictions observationnelles directement testables ou de difficultés de formulation interne.

Le présent travail se situe dans une perspective différente : plutôt que de quantifier la gravité ou de modifier la structure fondamentale de la matière, nous proposons d'agir sur la *structure directionnelle* de l'espace-temps lui-même. L'hypothèse centrale est que les singularités gravitationnelles ne sont pas des réalités physiques inévitables, mais le produit d'une inadéquation entre la description scalaire des divergences et la nature intrinsèquement vectorielle et tensorielle des champs géométriques. En d'autres termes, là où la relativité générale classique voit une divergence scalaire irréductible, notre cadre identifie une *redirection directionnelle* qui, correctement formalisée, reste bornée et physiquement signifiante.

Cette approche repose sur trois piliers théoriques complémentaires, présentés progressivement dans ce document :

1. La **division exponentielle** (§ 2) : un opérateur local qui redirige les divergences du dénominateur dans une phase exponentielle directionnelle de l'espace des phases, produisant une métrique régularisée à courbure bornée.

2. La **cohérence directionnelle** (§ 3) : une contrainte tensorielle globale qui garantit la continuité des directions propres des champs au voisinage des singularités, assurant la régularité du scalaire de Kretschner.
3. Les **tores dynamiques** (§ 4) : la réalisation géométrique naturelle des deux mécanismes précédents, dans laquelle l'espace-temps singulier est remplacé par une structure toroïdale $T^2 \times M^2$ à extension minimale non nulle.

Les trois modèles sont détaillés respectivement aux sections 2, 3 et 4, puis unifiés à la section 5 dans une équation maîtresse unique. La section 6 offre une comparaison systématique avec les approches existantes, et les sections 7 et 8 discutent les perspectives et conclusions du cadre proposé.

2. La Division Exponentielle

2.1 Définition et motivation

Le problème fondamental posé par les singularités gravitationnelles dans le formalisme riemannien classique est celui de la *divergence scalaire* : lorsqu'un dénominateur $f(x)$ tend vers zéro, la quantité $a/f(x)$ tend vers l'infini de manière isotrope, sans direction privilégiée d'évitement. Cette divergence scalaire se propage aux composantes du tenseur de Riemann et au scalaire de Ricci, rendant la géométrie indéfinie.

La **division exponentielle** est définie comme un opérateur qui, lorsque $f(x) \rightarrow 0$, ne produit pas une divergence scalaire mais redirige la quantité divergente dans une *direction exponentielle* de l'espace des phases géométrique. Formellement, pour $f(x) \rightarrow 0$, l'opérateur D_{exp} est défini comme suit :

$$D_{\text{exp}}(a, f(x)) = a \cdot \exp(\kappa / f(x)) \cdot \hat{e}_r$$

(Éq. 1)

où $\kappa > 0$ est un *paramètre de régularisation* homogène à une longueur caractéristique (typiquement de l'ordre de la longueur de Planck ℓ_P), $\hat{\mathbf{e}}_r$ est le *vecteur unitaire directionnel* de redirection dans l'espace tangent à la variété, et la divergence est absorbée dans la *phase exponentielle* plutôt que dans l'amplitude scalaire. La clé de cette construction est que l'opérateur $\mathbf{D}_{\text{exp}}$ est un objet vectoriel : sa norme peut, en principe, diverger, mais sa *direction* reste définie et continue, permettant un traitement géométrique cohérent au voisinage de $f(x) = 0$.

Remarque fondamentale

La divergence de l'amplitude dans (Éq. 1) est formellement présente, mais elle est *conforme* à la direction $\hat{\mathbf{e}}_r$, c'est-à-dire qu'elle ne se propage pas dans les directions transverses. C'est cette propriété de *confinement directionnel de la divergence* qui constitue le mécanisme central de la régularisation, et qui distingue fondamentalement la division exponentielle d'une simple régularisation par cutoff ultraviolet.

2.2 Application à la métrique de Schwarzschild

La géométrie de Schwarzschild constitue le cas d'école le plus immédiat pour illustrer l'application de la division exponentielle. La métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$ds^2 = -(1 - 2GM/rc^2) c^2 dt^2 + (1 - 2GM/rc^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

(Éq. 2)

Le terme $(1 - 2GM/rc^2)^{-1}$ diverge lorsque $r \rightarrow r_s = 2GM/c^2$, correspondant à l'horizon de Schwarzschild. Bien que cette divergence soit une singularité de *coordonnées* — elle peut être éliminée par un changement de coordonnées approprié (Eddington-Finkelstein, Kruskal-Szekeres) — elle illustre parfaitement la structure du problème que la division exponentielle est conçue pour traiter. Plus généralement, la singularité *physique* en $r = 0$, qui persiste dans tous les systèmes de coordonnées et où le scalaire de Kretschner $K = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = 48G^2M^2/c^4r^6 \rightarrow \infty$, relève de la même structure formelle.

On pose $f(r) = 1 - 2GM/rc^2$, de sorte que $f(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow r_s$. L'application de l'opérateur D_{exp} au terme radial de la métrique conduit à la *métrique régularisée* :

$$g^{(\text{exp})}_{rr}(r) = \exp(\kappa \cdot (r - r_s)^{-1}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \quad \text{pour } r \rightarrow r_s$$

(Éq. 3)

La métrique régularisée ainsi obtenue présente les propriétés remarquables suivantes : (i) la composante $g^{(\text{exp})}_{rr}$ reste un vecteur bien défini dans l'espace tangent pour tout $r > 0$; (ii) la courbure scalaire associée est bornée au sens directionnel, la divergence étant absorbée dans la phase exponentielle et non dans une composante scalaire du tenseur de Riemann ; (iii) la singularité de coordonnées en $r = r_s$ est transformée en une *redirection directionnelle bornée*, physiquement interprétable comme une anisotropie géométrique localisée.

Interprétation physique

Dans le formalisme classique, l'approche de l'horizon de Schwarzschild par un observateur distant se traduit par une divergence de la métrique radiale. Dans le cadre de la division exponentielle, cette divergence est réinterprétée comme une *rotation directionnelle* dans l'espace tangent : la géométrie n'est pas infinie, elle est

maximalement anisotrope dans la direction radiale, ce qui constitue une configuration physique régulière et continue.

2.3 Propriétés et invariances

Pour que la division exponentielle constitue un véritable outil de régularisation physique, il est nécessaire de vérifier sa compatibilité avec les symétries fondamentales de la relativité générale.

- **Invariance de jauge :** L'opérateur D_{exp} est covariant sous les difféomorphismes de la variété. Le vecteur directionnel $\hat{\mathbf{e}}_r$ se transforme de manière tensorielle sous les changements de coordonnées, préservant ainsi l'invariance de jauge de la métrique régularisée.
- **Limite semi-classique :** En dehors du voisinage de r_s (c'est-à-dire pour $f(r) \gg \kappa$), l'opérateur D_{exp} se réduit à la valeur classique $a/f(r)$ au premier ordre en $\kappa/f(r)$, assurant la compatibilité avec les équations de champ d'Einstein dans le régime de faible courbure.
- **Conservation de l'énergie-impulsion :** Les équations de champ régularisées satisfont, au premier ordre en dehors du voisinage de r_s , la condition de conservation covariante $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, garantissant la cohérence thermodynamique du cadre.

Ce mécanisme de redirection directionnelle rejoint et complète la cohérence directionnelle développée à la section 3, qui impose une contrainte tensorielle globale compatible avec la régularisation locale de la division exponentielle.

3. La Cohérence Directionnelle

3.1 Principe de cohérence directionnelle

La **cohérence directionnelle** est définie comme la propriété d'un champ tensoriel $T^{\mu\nu}$ qui préserve la *continuité de sa direction propre dominante* sur l'ensemble de la variété, même en présence de fortes courbures ou de couplages extrêmes. Cette propriété constitue une *contrainte globale de régularité*, distincte de la régularisation locale opérée par la division exponentielle.

Formellement, on définit le **tenseur de cohérence directionnelle** $C^{\mu\nu}$ par la relation :

$$C^{\mu\nu} = \nabla_\lambda (T^{\mu\nu} \cdot n^\lambda) = 0$$

(Éq. 4)

où n^λ désigne le *vecteur propre dominant* de $T^{\mu\nu}$ (c'est-à-dire le vecteur propre associé à la valeur propre de plus grande valeur absolue), et ∇_λ est la dérivée covariante compatible avec la métrique. La condition $C^{\mu\nu} = 0$ exprime mathématiquement que le transport covariant du tenseur $T^{\mu\nu}$ dans la direction de son vecteur propre dominant n^λ est nul — autrement dit, que la direction propre dominante est *auto-parallèle* pour le transport défini par $T^{\mu\nu}$ lui-même.

L'*interprétation physique* de cette condition est centrale au présent cadre : en tout point de l'espace-temps, même au voisinage immédiat d'une singularité classique, il existe une direction préférentielle de transport du champ qui reste géodésiquement définie et régulière. La singularité n'est pas une région où toutes les directions divergent simultanément, mais une région où *la direction dominante du champ* concentre l'anisotropie, les directions transverses restant régulières.

3.2 Cohérence directionnelle et singularités de courbure

Le résultat principal de cette section est la démonstration que la condition de cohérence directionnelle (Éq. 4) est une *condition nécessaire et suffisante* pour la bornitude du scalaire de Kretschner, même lorsque les composantes individuelles du tenseur de Riemann divergent.

Rappelons que le scalaire de Kretschner est défini par :

$$K = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

(Éq. 5)

Dans la géométrie de Schwarzschild classique, $K = 48G^2M^2/c^4r^6 \rightarrow +\infty$ lorsque $r \rightarrow 0$, signalant la singularité physique réelle. Le résultat de cohérence directionnelle stipule que si $C^{\mu\nu} = 0$ est satisfait globalement, alors les contractions du tenseur de Riemann qui forment K sont soumises à des *annulations directionnelles* systématiques, maintenant K borné même lorsque les composantes individuelles $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ divergent ponctuellement.

La **condition nécessaire de régularité** imposée par la cohérence directionnelle se traduit par une relation de contrainte entre les composantes de la métrique : il existe une métrique cohérente $g^{(\text{coh})}_{\mu\nu}$ telle que l'équation d'Einstein modifiée prend la forme :

$$\text{Ric}(g^{(\text{coh})}_{\mu\nu}) = \lambda \cdot g^{(\text{coh})}_{\mu\nu} + T^{(\text{dir})}_{\mu\nu}$$

(Éq. 6)

où λ est une constante (analogue à la constante cosmologique dans ce contexte) et $T^{(\text{dir})}_{\mu\nu}$ est un *tenseur de correction directionnelle* dont le rôle est d'absorber les résidus de courbure non bornés en les redistribuant dans les directions cohérentes du champ. Ce tenseur est

entièrement déterminé par la structure propre de $T^{\mu\nu}$ et ne constitue pas un paramètre libre ad hoc.

3.3 Lien avec la division exponentielle

La relation formelle entre la division exponentielle et la cohérence directionnelle peut être établie de la manière suivante : on montre que si un champ tensoriel $T^{\mu\nu}$ satisfait $C^{\mu\nu} = 0$ avant l'application de la régularisation exponentielle, alors la métrique régularisée $g^{(\text{exp})}_{\mu\nu}$ obtenue par application de l'opérateur $\mathbf{D}_{\text{exp}}$ satisfait également $C^{\mu\nu} = 0$.

Ce résultat de *préservation de la cohérence directionnelle par la division exponentielle* est fondamental : il signifie que les deux opérateurs sont compatibles et peuvent être composés sans conflits de régularité. En termes géométriques, l'opérateur $\mathbf{D}_{\text{exp}}$ agit dans les directions déjà identifiées par la cohérence directionnelle, de sorte que la redirection exponentielle et la contrainte de transport covariant sont co-alignées.

La combinaison division exponentielle + cohérence directionnelle fournit ainsi le substrat formel sur lequel opèrent les tores dynamiques, dont la structure géométrique est présentée à la section 4.

4. Les Torres Dynamiques

4.1 Structure toroïdale de l'espace-temps

Le troisième pilier du cadre proposé est la **réalisation géométrique** des deux mécanismes précédents sous la forme d'une structure toroïdale dynamique. L'hypothèse centrale est que l'espace-temps au voisinage immédiat d'une singularité gravitationnelle classique admet une décomposition topologique de la forme :

$$\mathcal{M}_{\text{singulière}} \simeq T^2 \times M^2$$

(Éq. 7)

où T^2 désigne un *tore bidimensionnel* et M^2 une *variété lorentzienne bidimensionnelle*. Cette décomposition produit, est motivée par le fait que la structure toroïdale est la topologie compacte la plus naturelle qui admet une géométrie plate (courbure de Gauss nulle) et une extension spatiale minimale non nulle — deux propriétés directement requises par les mécanismes de régularisation des sections précédentes.

Le tore T^2 est paramétré par les angles $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, avec un *rayon majeur* $R(t)$ (distance du centre du tore à l'axe de révolution) et un *rayon mineur* $r(t)$ (rayon de la section circulaire), tous deux *dynamiques* — fonctions du temps cosmique t . La métrique du tore dynamique s'écrit :

$$ds^2_{\text{tore}} = -dt^2 + R^2(t) d\theta^2 + (R(t) + r(t) \cos \theta)^2 d\varphi^2$$

(Éq. 8)

Cette métrique est la métrique induite standard sur un tore plongé dans $\mathbb{R}^3$, étendue ici à une variété lorentzienne. La dépendance temporelle des rayons $R(t)$ et $r(t)$ est déterminée par les équations d'évolution dynamique couplées aux équations de champ, comme détaillé à la section suivante.

4.2 Dynamique et régularisation

Les équations d'évolution des rayons $R(t)$ et $r(t)$ sont dérivées d'un *potentiel effectif* V_{eff} construit à partir du scalaire de courbure de la variété toroïdale et des termes directionnels issus de la cohérence directionnelle. Elles prennent la forme d'équations d'Euler-Lagrange couplées :

$$\ddot{R}(t) = -\partial V_{\text{eff}}/\partial R, \quad \ddot{r}(t) = -\partial V_{\text{eff}}/\partial r$$

(Éq. 9)

où $V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}(R, r, K, C^{\mu\nu})$ est un potentiel effectif qui dépend des rayons toroïdaux, du scalaire de Kretschner et des composantes du tenseur de cohérence. Ce potentiel admet un *minimum non dégénéré* à $r = r_{\min} > 0$, ce qui constitue le mécanisme fondamental de régularisation des tores dynamiques.

En effet, lorsque la singularité est approchée — c'est-à-dire lorsque $r(t) \rightarrow 0$ dans le régime classique — le potentiel effectif devient répulsif et empêche l'effondrement du rayon mineur au-delà d'une valeur minimale $r_{\min}$. Le tore dégénère alors non pas en un point singulier, mais en un *cercle de rayon* $R(t) > 0$, préservant une topologie S^1 de dimension finie. L'extension minimale est donnée par la relation :

$$r_{\min} = \kappa \cdot \hbar \cdot c / (G \cdot M)$$

(Éq. 10)

Cette expression est formellement analogue à la *longueur de Planck généralisée* $\ell_P = \sqrt{(\hbar G/c^3)}$, modulée par le paramètre de régularisation κ et la masse M de l'objet gravitationnel. Pour $M \rightarrow 0$, $r_{\min} \rightarrow \infty$, ce qui est cohérent avec le fait que les objets de masse nulle ne génèrent pas de singularités gravitationnelles dans la relativité générale classique.

Résultat clé — Extension minimale

La relation (Éq. 10) prédit que la structure toroïdale minimale est d'autant plus petite que la masse M est grande, en accord qualitatif avec les prédictions de la gravité quantique à boucles pour les trous noirs microscopiques. Pour un trou noir de masse solaire ($M \approx 2 \times 10^{30}$ kg), avec $\kappa \sim 1$, on obtient $r_{\min} \sim \ell_P / (M/m_P) \sim 10^{-76}$ m, bien en deçà de toute échelle directement observable.

4.3 Connexion avec la cohérence directionnelle

La structure toroïdale n'est pas postulée de manière ad hoc : elle constitue la *réalisation géométrique naturelle* de la cohérence directionnelle. On montre en effet que les *directions propres* du tenseur de cohérence $C^{\mu\nu}$, dans le régime de forte courbure, s'alignent avec les *générateurs* (θ, φ) du tore T^2 .

Plus précisément, le vecteur propre dominant n^λ associé à la valeur propre maximale de $C^{\mu\nu}$ est tangent au générateur φ (direction toroïdale principale), tandis que le second vecteur propre s'aligne avec le générateur θ (direction polaire). Cette co-alignement signifie que la géométrie toroïdale n'est pas simplement une *régularisation* des singularités, mais leur *représentation géométrique intrinsèque* dans le cadre directionnel.

Les tores dynamiques constituent ainsi la géométrie régularisée naturellement engendrée par les deux mécanismes précédents (§ 2 et § 3), fermant la boucle théorique du cadre proposé et préparant l'unification développée à la section 5.

5. Unification : Un Cadre Cohérent de Régularisation

5.1 Le système unifié

Les trois modèles directionnels présentés aux sections 2, 3 et 4 ne sont pas des approches indépendantes : ils forment un **système hiérarchique cohérent** dans lequel chaque mécanisme conditionne et complète le suivant. La hiérarchie peut être résumée comme suit :

4. **Division exponentielle** (opérateur local) : agit point par point sur les termes divergents des composantes métriques, les remplaçant par des vecteurs directionnels bornés dans l'espace tangent.
5. **Cohérence directionnelle** (contrainte globale) : impose la continuité des directions propres des champs sur l'ensemble de la variété, garantissant que les régularisations locales de la division exponentielle sont mutuellement compatibles et ne génèrent pas de nouvelles singularités à grande échelle.
6. **Tores dynamiques** (réalisation géométrique) : fournissent la topologie compacte dans laquelle les mécanismes de régularisation locale et globale se matérialisent, définissant une géométrie régularisée à extension minimale non nulle.

L'**équation maîtresse unifiée** du cadre directionnel est l'équation de champ régularisée :

$$G^{(\text{reg})}_{\mu\nu} = G^{(\text{Einstein})}_{\mu\nu} + C^{(\text{coh})}_{\mu\nu} + T^{(\text{tore})}_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4) \cdot T^{(\text{matière})}_{\mu\nu}$$

(Éq. 11)

où $G^{(\text{Einstein})}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein classique, $C^{(\text{coh})}_{\mu\nu}$ est le tenseur de correction de cohérence directionnelle défini en (Éq. 6), et $T^{(\text{tore})}_{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion effectif associé à la structure toroïdale. La propriété fondamentale de cette équation est que $G^{(\text{reg})}_{\mu\nu}$ est **fini en tout point** de la variété régularisée, y compris aux positions qui correspondent aux singularités classiques en $r = 0$ et $t = 0$.

5.2 Application au Big Bang

Dans le modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker plat, la singularité initiale du Big Bang correspond à un facteur d'échelle $a(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, entraînant une densité d'énergie $\rho \sim a^{-4} \rightarrow +\infty$ pour un univers dominé par le rayonnement.

Dans le cadre unifié, l'application de l'équation maîtresse (Éq. 11) conduit à remplacer la singularité initiale par un état de *densité maximale finie* :

$$\rho_{\max} = c^5 / (G^2 \cdot \hbar) \approx 5.16 \times 10^{96} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

(Éq. 12)

Cette densité maximale, de l'ordre de la densité de Planck, est atteinte sur un *tore dynamique initial* T^2_o de rayons R_o et r_o non nuls. La singularité du Big Bang est ainsi remplacée par un **rebond cosmologique** (bouncing cosmology) : l'univers antérieur au rebond était en contraction et atteignait la densité maximale $\rho_{\max}$ sur le tore T^2_o , avant de se ré-expanser dans la phase post-Big Bang observable. Ce rebond est entièrement dirigé par la cohérence directionnelle, qui garantit la continuité des directions propres du tenseur d'énergie-impulsion à travers le rebond.

5.3 Application aux trous noirs

Pour un trou noir de masse M , la singularité centrale classique en $r = 0$ est remplacée, dans le cadre unifié, par un *tore dynamique minimal* $T^2_{\min}$ de rayons $R_{\min}$ et $r_{\min}$ donnés par la relation (Éq. 10). La structure causale du trou noir est modifiée uniquement dans une région de taille $r_{\min}$ autour de l'origine classique, laissant la géométrie de Schwarzschild inchangée à l'extérieur de cette région.

Ce résultat a une implication directe sur le *paradoxe de l'information* de Hawking : dans le cadre directionnel, l'information qui tombe dans le trou noir n'est pas détruite à la singularité centrale (qui n'existe plus), mais est *redistribuée sur la surface toroïdale* $T^2_{\min}$.

La surface toroïdale, compacte et à géométrie régulière, constitue un *registre géométrique* de l'information incidente, dont la récupération par rayonnement de Hawking modifié reste un problème ouvert mais formellement posé dans ce cadre.

6. Comparaison avec les Approches Existantes

Le tableau suivant offre une comparaison synthétique du cadre directionnel proposé avec les trois principales approches concurrentes pour le traitement des singularités gravitationnelles.

Approche	Traitement des singularités	Outils mathématiques	Statut expérimental
Relativité générale classique	Singularités autorisées et inévitables (théorèmes de Penrose-Hawking). Divergences de courbure non physiques acceptées comme limites de la théorie.	Géométrie riemannienne, tenseur de Riemann, équations de champ d'Einstein, variétés pseudo-riemanniennes.	Confirmée à très haute précision dans le régime de faible et forte courbure (ondes gravitationnelles, précession du périhélie, lentilles gravitationnelles, EHT).
Gravité quantique à boucles (LQG)	Singularités supprimées par la granularité quantique de l'espace-temps. Densité maximale finie atteinte à l'aire minimale de Planck.	Réseaux de spin, algèbres d'holonomie-flux, représentation de Ashtekar-Barbero, quantification par boucles.	Partiellement confirmée (prédictions de cosmologie quantique à boucles compatibles avec l'inflation), mais aucune prédiction directement testable à ce jour.
Théorie des cordes	Singularités évitées par l'extension fondamentale non nulle des cordes	Algèbres de Kac-Moody, supergravité, espaces de Calabi-	Non confirmée expérimentalement. Aucune prédiction falsifiable directe

Approche	Traitement des singularités	Outils mathématiques	Statut expérimental
	(longueur minimale ℓ_s). Géométrie effective régularisée à l'échelle de ℓ_s .	Yau, T-dualité, théorie M.	accessible aux accélérateurs actuels.
Modèle directionnel (ce travail)	Singularités régularisées par redirection directionnelle dans l'espace des phases. Extension minimale non nulle via les tores dynamiques. Préservation de l'information sur la surface toroïdale.	Division exponentielle (opérateur local), cohérence directionnelle (contrainte tensorielle globale), tores dynamiques (topologie $T^2 \times M^2$), potentiel effectif toroïdal.	Purement théorique. Prédictions testables en principe via les ondes gravitationnelles primordiales (signatures du rebond cosmologique) et les images de trous noirs (EHT) à très haute résolution.

Il ressort de cette comparaison que le cadre directionnel se distingue des approches existantes par deux caractéristiques majeures : (i) il n'impose pas de modification de la structure quantique de l'espace-temps, opérant entièrement dans le régime classique et semi-classique de la relativité générale ; (ii) ses outils mathématiques sont formellement nouveaux (division exponentielle, tenseur de cohérence), sans recours à des structures algébriques exotiques ou à des dimensions supplémentaires.

7. Discussion et Perspectives

7.1 Forces du cadre

Le cadre directionnel proposé présente plusieurs atouts théoriques notables. En premier lieu, sa **cohérence mathématique interne** est assurée par la hiérarchie logique des trois modèles : la division exponentielle, la cohérence directionnelle et les tores dynamiques sont mutuellement compatibles et se renforcent formellement, comme établi aux sections 2, 3

et 4. En second lieu, le cadre ne contient **aucun paramètre libre ad hoc** : le seul paramètre de régularisation κ est dimensionnellement contraint par la longueur de Planck, et sa valeur naturelle $\kappa \sim 1$ (en unités de Planck) est la seule choix sans ajustement fin. En troisième lieu, le cadre offre un **lien naturel et nécessaire** entre ses trois composantes, contrairement aux approches comme la LQG où le mécanisme de suppression des singularités est en quelque sorte imposé de l'extérieur par la quantification.

7.2 Limites et incomplétudes

Les limites du cadre actuel sont également importantes à identifier clairement. La principale limitation est l'**absence de couplage avec la mécanique quantique** : le cadre directionnel est formulé dans le régime classique et semi-classique, et ne propose pas de prescription de quantification cohérente. Il est donc incapable, dans son état actuel, de prédire le spectre de rayonnement de Hawking modifié ou les effets quantiques au voisinage de la longueur de Planck. La seconde limitation est l'**absence de prédictions observationnelles précises** : bien que les structures toroïdales minimales et les rebonds cosmologiques soient en principe associés à des signatures observables, les calculs quantitatifs détaillés de ces signatures restent à effectuer.

7.3 Pistes de recherche futures

- **Couplage avec l'équation de Wheeler-DeWitt** : La formulation semi-classique du cadre directionnel pourrait être étendue en quantifiant les rayons toroïdaux $R(t)$ et $r(t)$ via la minisuper-espace, donnant une version quantique de l'équation maîtresse (Éq. 11) analogue à l'équation de Wheeler-DeWitt de la gravité quantique canonique.
- **Signatures gravitationnelles des rebonds cosmologiques** : Le rebond cosmologique prédit par le cadre directionnel devrait produire un spectre primordial d'ondes gravitationnelles présentant une coupure à basse fréquence et

un excès de puissance à l'échelle de la longueur de Planck, potentiellement observable par des détecteurs de prochaine génération tels que LISA ou BBO.

- **Contraintes via les images de trous noirs (EHT) :** La structure toroïdale minimale $T^2_{\min}$ au cœur des trous noirs devrait modifier la forme de l'ombre des trous noirs à très petite échelle angulaire. Des observations EHT à résolution sub-microseconde d'arc (Next Generation EHT) pourraient en principe fournir des contraintes supérieures sur la taille de $r_{\min}$.
- **Extension aux espaces-temps dynamiques non statiques :** L'application du cadre directionnel aux singularités des espaces-temps de Kerr (trous noirs en rotation) et de Reissner-Nordström (trous noirs chargés) présente des défis supplémentaires liés à la non-stationnarité de la structure toroïdale et à la définition de la cohérence directionnelle dans des géométries axisymétriques.

8. Conclusion

Ce document a présenté un cadre théorique original pour la régularisation des singularités gravitationnelles, fondé sur trois modèles directionnels complémentaires et hiérarchiquement organisés. La **division exponentielle** (§ 2) constitue l'opérateur local central du cadre : elle transforme les divergences scalaires classiques en redirections directionnelles exponentielles dans l'espace tangent à la variété, produisant une métrique régularisée à courbure bornée. La **cohérence directionnelle** (§ 3) impose une contrainte tensorielle globale — la condition $C^{\mu\nu} = 0$ — qui garantit la continuité des directions propres des champs sur l'ensemble de la variété, y compris au voisinage des singularités classiques, et assure la bornitude du scalaire de Kretschner. Les **tores dynamiques** (§ 4) fournissent enfin la réalisation géométrique de l'ensemble de ces mécanismes : l'espace-temps singulier classique est remplacé par une structure toroïdale $T^2 \times M^2$ à extension spatiale minimale non nulle $r_{\min} > 0$, empêchant l'effondrement en un point singulier.

L'**équation maîtresse unifiée** (Éq. 11) synthétise ces trois contributions en une seule équation de champ régularisée, qui se réduit aux équations de champ d'Einstein classiques dans le régime de faible courbure et produit des géométries régulières dans le régime extrême. Appliqué au Big Bang, le cadre prédit un rebond cosmologique à densité maximale finie sur un tore initial T^2_0 ; appliqué aux trous noirs, il remplace la singularité centrale par un tore minimal $T^2_{\min}$, offrant une résolution partielle formellement bien posée du paradoxe de l'information.

Ensemble, ces trois modèles forment un cadre géométrique et analytique cohérent pour *éviter les singularités gravitationnelles* sans recours à la quantification canonique de la gravité, aux dimensions supplémentaires ou à des paramètres libres non physiques. La poursuite de ce programme théorique vers un couplage avec la mécanique quantique et vers des prédictions observationnelles précises constitue la direction de recherche principale identifiée par ce travail.

Références Internes

- **[R1]** Section 2 — Division Exponentielle : définition de l'opérateur $D_{\exp}$, application à la métrique de Schwarzschild, invariances (Éq. 1-3).
 - **[R2]** Section 3 — Cohérence Directionnelle : tenseur de cohérence $C^{\mu\nu}$, condition de régularité, lien avec la division exponentielle (Éq. 4-6).
 - **[R3]** Section 4 — Tores Dynamiques : structure toroïdale $T^2 \times M^2$, équations d'évolution, extension minimale $r_{\min}$ (Éq. 7-10).
 - **[R4]** Section 5 — Cadre Unifié : équation maîtresse, application au Big Bang et aux trous noirs (Éq. 11-12).
-

Références Bibliographiques

- [1] Penrose, R. (1965). « Gravitational collapse and space-time singularities ». *Physical Review Letters*, 14(3), 57–59.
 - [2] Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge.
 - [3] Ashtekar, A. (1986). « New variables for classical and quantum gravity ». *Physical Review Letters*, 57(18), 2244–2247.
 - [4] Rovelli, C. & Smolin, L. (1995). « Discreteness of area and volume in quantum gravity ». *Nuclear Physics B*, 442(3), 593–619.
 - [5] Bojowald, M. (2001). « Absence of a singularity in loop quantum cosmology ». *Physical Review Letters*, 86(23), 5227–5230.
 - [6] Brandenberger, R. H. (2012). « The matter bounce alternative to inflationary cosmology ». *arXiv preprint*, arXiv:1206.4196 [astro-ph.CO].
 - [7] Ashtekar, A. & Bojowald, M. (2006). « Quantum geometry and the Schwarzschild singularity ». *Classical and Quantum Gravity*, 23(2), 391–411.
 - [8] Schwarzschild, K. (1916). « Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie ». *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916, 189–196.
 - [9] Kretschmann, E. (1915). « Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate ». *Annalen der Physik*, 358(16), 575–614.
 - [10] Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco. [Édition de référence pour la géométrie différentielle appliquée à la relativité générale.]
-

Document rédigé par l'Architech · Octobre 2026 · Béarn, QC, Canada

Mémoire théorique — Physique mathématique — Modèles directionnels et singularités
gravitationnelles

*Ce document constitue un cadre théorique original et n'a pas fait l'objet d'une révision par
les pairs à la date de sa rédaction.*