

La division exponentielle – Définition Axiomatique

L'Architech (Gabriel Breton-Breault)

★ Définition axiomatique — Version pour mathématicien

Axiome 1 — Espace directionnel interne

Soit S un objet géométrique compact muni d'un point central C . On associe à S un espace directionnel interne :

$$\mathcal{D}(S) \subset T_C(S),$$

où $T_C(S)$ désigne l'espace tangent en C . Les éléments de $\mathcal{D}(S)$ sont des **vecteurs directionnels internes**, propres à la géométrie de S .

Axiome 2 — Directions primaires

On définit un ensemble fini de directions primaires :

$$D_0 = \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \subset \mathcal{D}(S),$$

où n dépend de la géométrie de S . Exemples :

- sphère : $n = 6$ (directions internes orthogonales),
- cube : $n = 8$ (centre $\rightarrow$ sommets),
- tétraèdre : $n = 4$.

Ces directions ne sont pas des axes de coordonnées : ce sont des **vecteurs internes fondamentaux**.

Axiome 3 — Règle de génération des directions secondaires

Pour chaque direction $d \in D_k$, on définit un ensemble de directions secondaires :

$$\Delta(d) = \{f(d, d_i) \mid d_i \in D_0\},$$

où :

$$f: \mathcal{D}(S) \times \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(S)$$

est une application directionnelle interne donnée par :

$$f(d, d_i) = \frac{d + \lambda d_i}{\|d + \lambda d_i\|},$$

avec $\lambda > 0$ constant.

Ainsi, chaque direction secondaire est une **déviatiion interne normalisée** de la direction primaire.

Axiome 4 — Division exponentielle

La division exponentielle est définie récursivement par :

$$D_{k+1} = \bigcup_{d \in D_k} \Delta(d),$$

avec :

$$|\Delta(d)| = |D_0|.$$

Il en résulte :

$$|D_k| = |D_0|^k.$$

Cette croissance n'est pas volumétrique : elle est **directionnelle**.

Axiome 5 — Densité directionnelle

On définit la densité directionnelle interne :

$$\rho_k = \frac{|D_k|}{\text{Vol}(S)}.$$

Le volume géométrique de S reste constant, tandis que :

$$\rho_k = \frac{|D_0|^k}{\text{Vol}(S)}$$

croît exponentiellement.

Axiome 6 — Saturation directionnelle

On suppose l'existence d'une granularité directionnelle minimale $\delta > 0$. La saturation directionnelle est atteinte lorsque :

$$\rho_k \geq \rho_{\max} = \frac{1}{\delta}.$$

On définit alors :

$$k_{\max} = \left\lceil \log_{|D_0|} \left(\frac{\text{Vol}(S)}{\delta} \right) \right\rceil.$$

Au-delà de $k_{\max}$, aucune nouvelle direction interne ne peut être ajoutée.

★ Résumé pour mathématicien

La division exponentielle est une opération directionnelle interne définie sur un espace tangent associé à un objet géométrique compact. À partir d'un ensemble fini de directions primaires, chaque direction génère récursivement un ensemble de directions secondaires via une application directionnelle interne. Le nombre total de directions croît exponentiellement, tandis que le volume de l'objet reste constant. Une granularité directionnelle minimale impose une saturation, définissant un niveau maximal de subdivision directionnelle.